

# Makroekonomia II

## Ćwiczenia 2. – odpowiedzi

Funkcja produkcji, model Solowa

### Zadania

**Zad. 1.** Dla podanych funkcji produkcji sprawdź, czy spełniają one warunki stawiane neoklasycznym funkcjom produkcji. Jeśli tak, zapisz je w postaci intensywnej i narysuj wykres  $f(k)$ .

- (a)  $Y = KL$
- (b)  $Y = (K + L)^a$ ;  $a > 1$
- (c)  $Y = K^{0,5}L^{0,5}$
- (d)  $Y = K^aL^{(1-a)}$ ;  $a > 0$

**Zad. 2.** W modelu Solowa ze stałą populacją i stałą technologią stopa oszczędności  $s = 0,2$ , a stopa deprecjacji kapitału wynosi  $\delta = 0,05$ .  $k, y, c$  oraz  $i$  to wielkości *per capita* (odpowiednio kapitał, produkcja, konsumpcja, inwestycje).

- (a) Przedstaw funkcję produkcji  $Y = K^{1/3}L^{2/3}$  w postaci intensywnej (*per capita*).
- (b) Znajdź stan ustalony ( $\bar{k}$ )
- (c) Ile wynosi kapitał zgodnie ze „złotą regułą” ( $\hat{k}$ )? Złota reguła wyznacza poziom kapitału, który maksymalizuje poziom konsumpcji *per capita* ( $c$ ) w stanie ustalonym.
- (d) Ile powinna wynosić stopa oszczędności ( $\hat{s}$ ), aby  $\bar{k} = \hat{k}$ ? Jak powinna się zmienić początkowa stopa oszczędności, aby osiągnąć poziom zgodny ze „złotą regułą”?
- (e) Narysuj na jednym wykresie następujące funkcje:  $y = f(k), \delta k, sf(k), \hat{s}f(k)$
- (f) Jakie narzędzia polityki gospodarczej mogą wpłynąć na zmianę stopy oszczędności z  $s$  na  $\hat{s}$ ?

**Zad. 3.** Załóżmy, że iloraz  $K/Y$  jest stały i wynosi 2.

- (a) Najpierw przyjmij, że liczba ludności się nie zmienia i że nie ma postępu technologicznego. Ile w stanie ustalonym wynosi relacja oszczędności-produkcja, która odpowiada stopie deprecjacji równej 5%?
- (b) Teraz dopuść możliwość wzrostu, którego przyczyną jest zwiększanie się liczby ludności lub postęp technologiczny. Oblicz odpowiadającą stanowi ustalonemu relację oszczędności-produkcja, możliwą do pogodzenia ze stopą deprecjacji równą 5% i 3-procentowym tempem wzrostu realnego PKB.

**Zad. 4.** Funkcja produkcji w formie intensywnej ma postać:  $y = f(k) = k^\alpha$ ,  $\alpha = 0,3$ . Stopa deprecjacji wynosi 4%, a iloraz  $K/Y$  jest stały i wynosi 2,5. W stanie ustalonym realny PKB rośnie w tempie 3%.

- (a) Ile wynosi początkowa stopa oszczędności?
- (b) Ile wynosi krańcowy produkt kapitału ( $mpk$ )?
- (c) Ile wynosi krańcowy produkt kapitału ( $mpk$ ) zgodny ze „złotą regułą”? Jak powinien zmienić się początkowy poziom kapitału  $k$ , aby osiągnąć poziom zgodny ze „złotą regułą”?
- (d) Ile wynosi relacja oszczędności-produkcja zgodna ze „złotą regułą”?
- (e) Jak powinna się zmienić początkowa stopa oszczędności, aby osiągnąć poziom zgodny ze „złotą regułą”?

# Odpowiedzi

## Zad. 1

- (a) NIE:  $Y_{K,K} = 0$ ;  $\lambda Y \neq \lambda K \lambda L$   
(b) NIE:  $Y_{K,K} > 0$ ;  $\lambda Y \neq (\lambda K + \lambda L)^a$   
(c) TAK.  $y = k^{0,5}$   
(d) TAK dla  $a < 1$ ; NIE dla  $a > 1$

## Zad. 2

- (a)  $\frac{Y}{L} = \frac{K^{1/3}L^{2/3}}{L} = k^{1/3}$   
(b)  $sf(\bar{k}) = \delta\bar{k}$   
 $s\bar{k}^{1/3} = \delta\bar{k}$   
 $\bar{k}^{2/3} = s/\delta$   
 $\bar{k} = (s/\delta)^{3/2} = (0,2/0,05)^{3/2} = 8$   
(c)  $k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t$ ;  $i_t = f(k_t) - c_t$   
 $k = (1 - \delta)k + f(k) - c$   
 $c = f(k) - \delta k$   
Maksymalizujemy  $c$ :  
 $c' = f'(k) - \delta = 0 \implies f'(\hat{k}) = \delta$   
 $\frac{1}{3}\hat{k}^{-2/3} = \delta$   
 $\hat{k} = 17,21$   
(d)  $\hat{s} \cdot f(\hat{k}) = \delta\hat{k}$   
 $\hat{s} = \frac{\delta\hat{k}}{f(\hat{k})} = \frac{0,05 \cdot 17,21}{17,21^{1/3}} = \frac{1}{3}$   
powinna wzrosnąć

## Zad. 3.

- (a)  $K/Y = 2$ ,  $a = 0$ ,  $n = 0$ ,  $\delta = 5\%$   
 $k_{t+1} = sf(k_t) + (1 - \delta)k_t$ , w stanie ustalonym  $k_{t+1} = k_t = k$   
Stan ustalony:  $sy = \delta k$   
 $s = \frac{\delta k}{y} = \frac{\delta K/L}{Y/L} = \delta \frac{K}{Y} = 0,05 \cdot 2 = 0,1$   
(b)  $K/Y = 2$ ,  $a + n = 3\%$ ,  $\delta = 5\%$   
Stan ustalony:  $sy = (\delta + a + n)k$   
 $s = \frac{(\delta + a + n)K/(AL)}{Y/(AL)} = (\delta + a + n) \frac{K}{Y} = (0,05 + 0,03) \cdot 2 = 0,16$

## Zad. 4.

- (a)  $n + g = 0,03$   
Stan ustalony:  $sy = (\delta + a + n)k$   
 $s = (\delta + a + n)k/y = (\delta + a + n)K/Y = (0,04 + 0,03) \cdot 2,5 = 0,175$   
(b) Dla funkcji produkcji Cobba-Douglasa:  $\alpha = mpk(K/Y)$   
 $mpk = \alpha/(K/Y) = 0,3/2,5 = 0,12$   
(c) Złota reguła:  $mpk = \delta + a + n = 0,04 + 0,03 = 0,07$   
powinien się zwiększyć  
(d)  $\alpha = mpk(K/Y)$   
 $(K/Y) = \alpha/mpk = 0,3/0,07 = 4,29$   
(e)  $s = (\delta + a + n)K/Y = (0,04 + 0,03) \cdot 4,29 = 0,3$   
powinna się zwiększyć