Model Solowa

Anna Duszak

1 Neoklasyczna funkcja produkcji

Neoklasyczna funkcja produkcji musi spełniać jednocześnie trzy cechy:

1. Stałe przychody ze skali: $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L)$

2. Pierwsza pochodna względem każdego czynnika produkcji jest dodatnia:

$$F_K = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0 \qquad F_L = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0$$

   Druga pochodna względem każdego czynnika produkcji jest ujemna:

$$F_{KK} = \frac{\partial F(K,L)}{\partial K \partial K} < 0 \qquad F_{LL} = \frac{\partial F(K,L)}{\partial L \partial L} < 0$$

3. Warunki Inady:

$$\lim_{K\to\infty} F_K = 0 \qquad \lim_{L\to\infty} F_L = 0$$
$$\lim_{K\to 0} F_K = \infty \qquad \lim_{L\to 0} F_L = \infty$$

Każda funkcja Cobba-Douglasa, czyli funkcja, która jest postaci: $F(K,L) = aK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, jest neoklasyczną funkcją produkcji.

2 Model Solowa

2.1 Założenia

Model Solowa jest modelem gospodarki zamkniętej bez sekora rządowego. Z pierwszych zajęć wiemy, że dochód (PKB, Y) w takiej gospodarce może zostać wydany na konsumpcję (C) lub zaoszczędzony (S):

$$Y = C + S$$

Model Solowa jest dynamiczny, dlatego do wszystkich równań dodamy oznaczenie czasu t (czas jest dyskretny). Dochód (PKB, Y_t) może być podzielony pomiędzy konsumpcję (C_t) i oszczędności (S_t):

$$Y_t = C_t + S_t \tag{1}$$

Funkcja produkcji określa produkcję (PKB, Y_t), która może zostać wytworzona przy wykorzystaniu nakładów kapitału (K_t) i pracy (L_t):

$$Y_t = F(K_t, L_t) \tag{2}$$

Ludzie oszczędzają pewną część dochodu (s), a oszczędności (S_t) równają się inwestycjom (I_t):

$$I_t = S_t = sY_t \tag{3}$$

Pozostała część dochodu jest przeznaczana na konsumpcję (C_t):

$$C_t = (1 - s)Y_t \tag{4}$$

Ważnym równaniem w modelu Solowa jest tzw. **równanie ruchu kapitału**:

$$K_{t+1} = I_t + (1 - \delta)K_t \tag{5}$$

Równanie to określa, w jaki sposób tworzony jest kapitał (K_{t+1}) w gospodarce – zależy on od inwestycji podjętych w poprzednim okresie (I_t) oraz kapitału z poprzedniego okresu (K_t), który nie uległ deprecjacji (δ to stopa deprecjacji).

2.2 Postać intensywna (*per capita*)

W modelu Solowa wszyscy pracują, a więc liczba ludności jest równa liczbie pracujących (L_t). W najprostszym wariancie modelu Solowa zakładamy, że liczba ludności się nie zmienia (a więc L_{t+1}=L_t=L).

W celu uzyskania postaci intensywnej dzielimy obie strony równań (1-5) przez L_t. Każdą zmienną X_t podzieloną przez liczbę ludności L_t zapisujemy małą literą (a więc $K_t/L_t = k_t$, $K_{t+1}/L_{t+1} = k_{t+1}$, $Y_t/L_t = y_t$, $I_t/L_t = i_t$, itd.). Postać intensywna równań ułatwia nam dalszą pracę z modelem (m.in. rysowanie wykresów).

$$y_t = c_t + s_t \tag{6}$$

$$y_t = f(k_t, 1) = f(k_t) \tag{7}$$

(przy przekształcaniu funkcji produkcji korzystamy z własności neoklasycznej funkcji produkcji)

$$i_t = sy_t \tag{8}$$

$$c_t = (1 - s)y_t \tag{9}$$

$$k_{t+1} = i_t + (1 - \delta)k_t \tag{10}$$

2.3 Stan ustalony (*steady state*)

Stan ustalony opisuje długookresową równowagę gospodarki. W stanie ustalonym wszystkie zmienne są stałe (a więc $k_t = k_{t+1} = k_t$, $y_t = y$, $i_t = i$, itd.).

Zaczynamy od zapisania równania ruchu kapitału w stanie ustalonym:

$$k = i + (1 - \delta)k \tag{11}$$

i przekształcenia go:

$$\delta k = i \tag{12}$$

Następnie zapisujemy równanie (8) w stanie ustalonym:

$$i = sy \tag{13}$$

Łącząc równanie (12) i (13) otrzymujemy **równanie stanu ustalonego**:

$$\delta k = sy \tag{14}$$

lub podstawiając $y = f(k)$:

$$\delta k = sf(k) \tag{15}$$

2.4 Złota reguła

Złota reguła wyznacza poziom kapitału (k), który maksymalizuje poziom konsumpcji *per capita* (c) w stanie ustalonym.

Zaczynamy od równania (9) zapisanego w stanie ustalonym, które wyznacza poziom konsumpcji per capita:

$$c = (1 - s)y \tag{16}$$

Przekształcamy powyższe równanie, zapisujemy y jako funkcję produkcji i korzystamy z równania (14):

$$c = (1 - s)y = \underbrace{y}_{f(k)} - \underbrace{sy}_{\delta k} = f(k) - \delta k \tag{17}$$

Chcemy znaleźć taki poziom kapitału k, aby poziom konsumpcji per capita c był jak najwyższy. Zapisujemy problem maksymalizacyjny:

$$\max_k(c) = \max_k(f(k) - \delta k) \tag{18}$$

Liczymy pochodną wyrażenia $f(k) - \delta k$ względem k i przyrównujemy ją do 0:

$$f'(k) - \delta = 0 \tag{19}$$

Otrzymujemy równanie **złotej reguły:**

$$f'(k) = \delta \tag{20}$$

2.5 Rozszerzenie modelu Solowa

Do tej pory zakładaliśmy, że liczba ludności się nie zmienia i nie ma postępu techincznego. W rozszerzonej wersji modelu Solowa, zakładamy, że liczba ludności (L) rośnie w stałym tempie n ($L_{t+1} = (1 + n)L_t$), a postęp techniczny (A) rośnie w stałym tempie a ($A_{t+1} = (1 + a)A_t$).

Postać intensywną w tej wersji modelu Solowa otrzymujemy poprzez podzielenie równań przez tzw. jednostkę pracy efektywnej (A_tL_t) – jednostkę pracy przemnożoną przez postęp techniczny.
W wyniku przekształceń otrzymamy następujące równania:

Stan ustalony: $sy = sf(k) = (\delta + a + n)k$
Złota reguła: $f'(k) = \delta + a + n$
Zauważmy, że gdy a=0 i n=0, powyższe równania sprowadzają się do odpowiednich równań (15 i 20) z podstawowej wersji modelu Solowa.

2.6 Najważniejsze równania

Model Solowa bez postępu technicznego i bez wzrostu liczby ludności ($a = 0$ i $n = 0$):

Stan ustalony: $sy = sf(k) = \delta k$
Złota reguła: $f'(k) = \delta$

Model Solowa z postępem technicznym i wzrostem liczby ludności ($a \neq 0$ i $n \neq 0$):

Stan ustalony: $sy = sf(k) = (\delta + a + n)k$
Złota reguła: $f'(k) = \delta + a + n$